ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

KHOA THỊ KIM THOA

CÁC SỐ TỔ HỢP
VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG TRONG THỐNG KÊ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

KHOA THỊ KIM THOA

CÁC SỐ TỔ HỢP
VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG TRONG THỐNG KÊ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành với sự hướng dẫn của GS.TSKH. Hà Huy Khoái (Trường Đại học Thăng Long). Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán - Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả muốn gửi những lời cảm ơn tốt đẹp nhất tới tập thể Lớp B, cao học Toán khóa 9 (2015 - 2017) đã động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong suốt quá trình học tập.

Nhân dịp này, tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp ở Trường THPT Nguyễn Đức Cảnh, Huyện Kiến Thụy, Thành phố Hải Phòng đã tạo điều kiện cho tác giả hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập và công tác của mình.

Cuối cùng, tác giả muốn dành những lời cảm ơn đặc biệt nhất đến bố mẹ và đại gia đình đã luôn động viên và chia sẻ những khó khăn để tác giả hoàn thành tốt luận văn này.

Mở đầu

Các số nhị thức là đề tài đã được đề cập nhiều trong các tài liệu về Toán học ở trường THPT. Với mỗi công thức của các số nhị thức, người ta thường dùng phương pháp chứng minh quy nạp. Phương pháp này có ưu điểm là dễ hiểu, gọn, nhưng nhiều khi làm mất "ý nghĩa tổ hợp" của đẳng thức. Điều này làm cho học sinh đôi khi không hiểu sâu vấn đề, và do đó khó khăn khi vận dụng.

Vì thế, tôi chọn nghiên cứu đề tài *" Các số tổ hợp và một số ứng dụng trong thống kê"* làm luận văn thạc sĩ của mình.

Một phần của luận văn này được dành để trình bày nhiều công thức của các số tổ hợp với hai cách chứng minh: chứng minh đại số và chứng minh tổ hợp, nhằm giúp độc giả hiểu sâu hơn bản chất vấn đề.

Phần còn lại của luận văn được dành để giới thiệu một số ứng dụng của các số tổ hợp trong thống kê, với mục đích giúp người đọc, đặc biệt là các em học sinh thấy rõ hơn những ứng dụng của Toán học trong đời sống thực tiễn.

Luận văn gồm hai chương:

- *Chương 1. Các số nhị thức: những khía cạnh đại số và tổ hợp* được dành để trình bày về các đồng nhất thức của các số nhị thức, phân tích những khía cạnh đại số và tổ hợp của các số nhị thức như tính đối xứng; tính chất tổng dòng, tổng cột, tổng đường chéo, tính chẵn lẻ của các số nhị thức; nghịch đảo các số nhị thức cũng được trình bày trong chương này. Tài liệu sử dụng là tài liệu số [2].

- *Chương 2. Một số ứng dụng của số nhị thức trong thống kê* trình bày một số khái niệm của xác suất, sự phân bố nhị thức và phép hồi quy Catalan. Tài liệu sử dụng là tài liệu số [1] và [2].

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 7 năm 2017

Tác giả

Khoa Thị Kim Thoa

Chương 1

Các số nhị thức: những khía cạnh đại số và tổ hợp

1.1 Đồng nhất thức các số nhị thức: chứng minh đại số và tổ hợp

Bảng tam giác Pascal của các số nhị thức

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	Σ
0	1									1
1	1	1								2
2	1	2	1							4
3	1	3	3	1						8
4	1	4	6	4	1					16
5	1	5	10	10	5	1				32
6	1	6	15	20	15	6	1			64
7	1	7	21	35	35	21	7	1		128
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	256

Mệnh đề 1.1.1. *Các số tổ hợp $\binom{n}{k}$ thỏa mãn quan hệ hồi quy Pascal (1.1).*

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \textit{với mọi } n \geq 0: \qquad \textit{cột bên trái}$$

$$\binom{0}{k} = 0 \qquad \textit{với mọi } k \geq 1: \qquad \textit{dòng đầu tiên trên cùng}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad \textit{với } n \geq 1 \tag{1.1}$$

- Các số nhị thức $b_{n,k}$ là các hệ số của x^k trong khai triển nhị thức

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}x^k$$

Mệnh đề 1.1.2. *Các số nhị thức thỏa mãn quan hệ hồi quy Pascal (1.1).*

Hệ quả 1.1.3. *Với mọi $k, n \in N$,*

$$\binom{n}{k} = b_{n,k}$$

- Vì các số tổ hợp có cùng giá trị với các số nhị thức nên theo hệ quả 1.1.3 chúng đều được gọi là các số nhị thức.

Mệnh đề 1.1.4. *Với mọi số nguyên không âm n và k,*

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \tag{1.2}$$

với

$$n^{\underline{k}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

Hệ quả 1.1.5. *Với mọi số nguyên không âm n và k,*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.3}$$

Chứng minh đại số, chứng minh tổ hợp

- Chứng minh đại số của đẳng thức được thực hiện bằng những biến đổi đại số. Thông thường, người ta dùng phương pháp quy nạp. Phương pháp quy nạp có ưu điểm là đưa ra chứng minh rất ngắn gọn, nhưng nhược điểm lớn nhất là nhiều khi không làm rõ được bản chất vấn đề cũng như ý nghĩa của công thức.

- Chứng minh tổ hợp được dùng nhằm khắc phục nhược điểm nêu trên. Cụ thể là trong chứng minh đẳng thức nào đó bằng phương pháp tổ hợp, người ta thường tính đại lượng ở hai vế của đẳng thức theo hai cách khác nhau. Từ đó thấy rõ bản chất của vấn đề đang xét.

  Chúng ta sẽ minh hoạ hai phương pháp nêu trên qua một số ví dụ .

Tính đối xứng

Một số đồng nhất thức là sự khái quát của tính chất dễ dàng nhận thấy trong tam giác Pascal. Một trong các tính chất đó là mỗi dòng của tam giác Pascal có tính xuôi ngược, nó được đọc giống nhau từ phải sang trái hoặc từ trái sang phải. Ví dụ chúng ta quan sát tính đối xứng của dòng 8:

$$1 \qquad 8 \qquad 28 \qquad 56 \qquad 70 \qquad 56 \qquad 28 \qquad 8 \qquad 1$$

Mệnh đề 1.1.6. ***(Tính đối xứng theo dòng)***. *Với số nguyên n, k bất kỳ mà* $0 \le k \le n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{1.4}$$

Chứng minh. (Chứng minh đại số). Sử dụng phương trình (1.3) ta có ngay kết quả của phép chứng minh đại số này.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$$

□

Chứng minh. (Chứng minh tổ hợp). Đại lượng ở vế trái của đẳng thức (1.4) là số các cách khác nhau để chọn k phần tử từ tập n phần tử. Vế phải là các cách khác nhau để chọn (n-k) phần tử còn lại từ tập đó. Vì mỗi cách chọn k phần tử từ tập n phần tử chính là một cách chọn (n-k) phần tử còn lại trong n phần tử nên hai cách chọn đều có số lượng như nhau. □

Tính chất tổng dòng

Một tính chất khác của tam giác Pascal là tổng của các hạng tử trong mỗi dòng là lũy thừa của 2. Ví dụ trong dòng 8,

$$\begin{aligned} 1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 \\ = 256 = 2^8 \end{aligned}$$

Mệnh đề 1.1.7. ***(Tính chất tổng dòng)****. Tổng các hạng tử trong dòng n của tam giác Pascal là* 2^n*, tức là:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \tag{1.5}$$

*Chứng minh. (Chứng minh tổ hợp).*Theo hệ quả 1.1.3, các số hạng ở vế trái là số cách chọn các tập con lực lượng k từ tập S gồm *n* phần tử, và làm như vậy với mỗi giá trị của *k*. Như vậy, số các tập con của tập hữu hạn S có n phần tử là 2^n. □

Chứng minh. (Chứng minh đại số). Thay $x = 1$ vào cả hai vế của phương trình rồi khai triển nhị thức ta được kết quả sau đây,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n$$

$$\Rightarrow (1+x)^n \Big|_{x=1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n \Big|_{x=1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^n$$